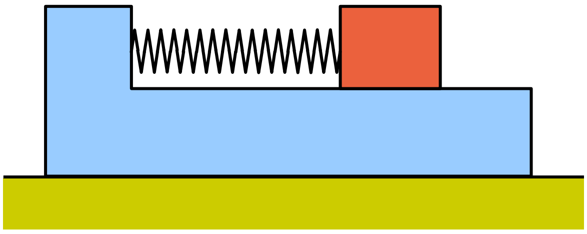
「物理の小道」特別編 「慣性力の応用を考える」⑤



右の図のように、質量 M [kg] の台の上に乗った質量 m [kg] の物体がある。この物体と台はばね定数 k [N/m] の軽いばねでつながれており、最初、ばねは自然長（長さ L [m]）である。台と物体の間の摩擦力は無視できるものとする。台と物体に力を加えて、ばねを D [m] 縮めた後、台と物体を静かに離した。

台上でばねの自然長の位置を原点とし、右向きを正とする。台から見た物体の加速度を a [m/s^2] 、床から見た台の加速度を A [m/s^2] とする。

物体の位置が x [m] にあるとき、台に働く水平方向の力は $\boxed{\ 1\ }$ だから、床から見た台の運動方程式は $\boxed{\ 2\ }$ ･･･(1) である。

一方、物体に働く力はばねの力は $\boxed{\ 3\ }$ 、慣性力は $\boxed{\ 4\ }$ であるので、物体の運動方程式は $\boxed{\ 5\ }$ ･･･(2) になる。

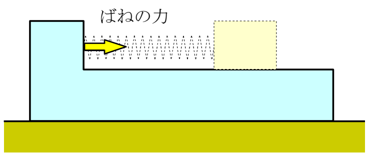
(1)、(2) より、物体の加速度 a を A を含まない形で表すと $a=\boxed{\ 6\ }$ と表すことができる。この結果から、(A) <u>物体は台から見ると単振動運動になっていることが分かる。</u>この単振動の周期は $\boxed{\ 7\ }$ 、振幅は $\boxed{\ 8\ }$ であり、手を離してから t [s] のときの物体の位置 x を表すと、 $x=\boxed{\ 9\ }$ と表すことができる。

問1　上の文章の空欄に適当な数式、関係式を入れなさい。

問２　下線部(A) の根拠を説明しなさい。

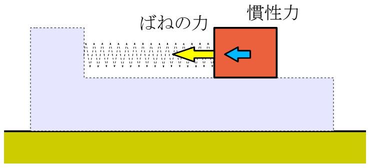
問３　床から見た物体の運動を説明しなさい。

「物理の小道」特別編 「慣性力の応用を考える」⑤



問１　台上でばねの自然長の位置を原点（ $x=0$ ）とし、右向きを正とする。台から見た物体の加速度を a [m/s²]、床から見た台の加速度を A [m/s²] とする。

物体の位置が x [m] のとき、台に働く水平方向の力は $+kx$ [N] より、床から見た台の運動方程式は $MA=kx$ ・・・(1) である。



一方、物体に働くばねの力は $-kx$ 、慣性力は $-mA$ だから、物体の運動方程式は $ma=-kx-mA$ ・・・(2) になる。

(1)、(2) より、物体の加速度 a を A を含まない形で表すと $a=-\frac{k}{m}x-\frac{kx}{M}$ だから $a=-\left\{\frac{k(m+M)}{mM}\right\}x$ と表すことができる。この結果は単振動の公式 $a=-\omega^2 x$ より、角振動数 ω は $\sqrt{\frac{k(m+M)}{mM}}$ より、周期は $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{mM}{k(m+M)}}$ [s] である。

また、この単振動の中心は自然長の位置（ $x=0$ ）、手を離したとき（ $x=-D$ ）は振動の端だから、振幅は D [m]である。また、時刻ゼロのとき、物体の位置は $x=-D$ から速度ゼロで動き出すので、初期位相は $\delta=\frac{3}{2}\pi$ である。よって、以上で求めた角振動数、振幅、初期位相を単振動の公式 $x=A\sin(\omega t+\delta)$ に代入すればよい。

手を離してから t [s] のときの物体の位置 x を表すと、

$x=D\sin\left\{\sqrt{\frac{k(m+M)}{mM}}t+\frac{3}{2}\pi\right\}$ だから $x=-D\cos\sqrt{\frac{k(m+M)}{mM}}t$ ・・・(3) である。

問２　台から見た物体の加速度は $a=-\left\{\frac{k(m+M)}{mM}\right\}x$ と表すことができる。

単振動の公式 $a=-\omega^2 x$ （加速度が変位に比例し、比例定数が負）と一致しているので、台から見た物体の運動は単振動といえる。

問３　(1)より、台の加速度は $A=\frac{kx}{M}$ だから、(3) を代入して $A=-\frac{kD}{M}\cos\sqrt{\frac{k(m+M)}{mM}}t$ である。単振動の公式 $a=-\omega^2 x$ より、 $x=-\frac{a}{\omega^2}$ だから、 t [s] のときの台の位置 X は

$X=\frac{Dm}{m+M}\cos\sqrt{\frac{k(m+M)}{mM}}t$ である（ばねが自然長のときの台の位置を $X=0$ とする）。

床から見た物体の位置は $x'=x+X$ より、 $x'=x+X=-\frac{DM}{m+M}\cos\sqrt{\frac{k(m+M)}{mM}}t$ となる。

よって、振幅が $\frac{M}{m+M}$ 倍になるが、周期は $T=2\pi\sqrt{\frac{mM}{k(m+M)}}$ で変わらない単振動となる。 **※ よく考えると、このシリーズの「②と同じ運動」を扱っているだけのこと！ 分かっていたでしょうか？**