衝突のときに力学的エネルギー保存の法則は成立するのか

質量が m_1 の物体Aと、質量が m_2 の物体Bが、反発係数 e の衝突をするとき、運動量保存の法則と反発係数の公式から $m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2'$ と $e = -\dfrac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2}$ が成立する。この式を解いて、衝突前後で運動エネルギーの和が変化しているかどうかを求めて見る。運動エネルギーの和の変化量は $\Delta U = \left(\dfrac{1}{2}m_1v_1'^2 + \dfrac{1}{2}m_2v_2'^2\right) - \left(\dfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \dfrac{1}{2}m_2v_2^2\right)$ を計算することになる。

→（方針は決定した！ あとは計算をやり遂げるのみだ）

［計算の経過］

まず、衝突後のそれぞれの速度をもとめる。運動量保存の法則、反発係数公式からの式より

$$\begin{cases} m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v'_1 + m_2v'_2 \\ e(v_1 - v_2) = -v'_1 + v'_2 \end{cases}$$

上の連立方程式を解くと

第二式の両辺に m_1 をかけて

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v'_1 + m_2v'_2$$
$$em_1(v_1 - v_2) = -m_1v'_1 + m_1v'_2$$

片々足し算して

$$(m_1 + m_2)v'_2 = m_1v_1 + m_2v_2 + em_1(v_1 - v_2)$$
$$v'_2 = \frac{m_1v_1 + m_2v_2 + em_1(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}$$

第二式の両辺に m_2 をかけて

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v'_1 + m_2v'_2$$
$$em_2(v_1 - v_2) = -m_2v'_1 + m_2v'_2$$

片々引き算して

$$(m_1 + m_2)v'_1 = m_1v_1 + m_2v_2 - em_2(v_1 - v_2)$$
$$v'_1 = \frac{m_1v_1 + m_2v_2 - em_2(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}$$

→（この当たりまで計算は順調だ！ つづけて行こう！）

衝突後の運動エネルギーを計算すると

$$\frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2$$
$$= \frac{1}{2(m_1 + m_2)^2}[m_1\{m_1v_1 + m_2v_2 - em_2(v_1 - v_2)\}^2 + m_2\{m_1v_1 + m_2v_2 + em_1(v_1 - v_2)\}^2]$$

[ ]の中を取り出して計算すると

→（このあたりから複雑になってきた！ 部分的に計算することになる。後は「ド根性」だけ）

→（強引だが展開するしかないの？ 対称式になっているので消えるのでは？ 甘いかも？）

$$m_1\{m_1v_1 + m_2v_2 - em_2(v_1 - v_2)\}^2 + m_2\{m_1v_1 + m_2v_2 + em_1(v_1 - v_2)\}^2$$
$$= m_1(m_1v_1 + m_2v_2)^2 - 2em_1m_2(v_1 - v_2) + e^2m_1m_2^2(v_1 - v_2)^2$$
$$+ m_2(m_1v_1 + m_2v_2)^2 + 2em_1m_2(v_1 - v_2) + e^2m_2m_1^2(v_1 - v_2)^2$$
$$= (m_1 + m_2)(m_1v_1 + m_2v_2)^2 + e^2m_1m_2(m_1 + m_2)(v_1 - v_2)^2$$

元の式に代入してみると

$\frac{1}{2}m_1v'^2_1+\frac{1}{2}m_2v'^2_2$

$=\frac{1}{2(m_1+m_2)^2}[(m_1+m_2)(m_1v_1+m_2v_2)^2+e^2m_1m_2(m_1+m_2)(v_1-v_2)^2]$

$=\frac{1}{2(m_1+m_2)}[(m_1v_1+m_2v_2)^2+e^2m_1m_2(v_1-v_2)^2]$

→（それなりに式が簡単になってきたようです！　予想通りだ！）

これをエネルギーの変化量の式に代入して、さらに計算を続ける。

$\Delta U=\left(\frac{1}{2}m_1v'^2_1+\frac{1}{2}m_2v'^2_2\right)-\left(\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2\right)$

$=\frac{1}{2(m_1+m_2)}\{(m_1v_1+m_2v_2)^2+e^2m_1m_2(v_1-v_2)^2-\frac{1}{2}(m_1v_1^2+m_2v_2^2)\}$

$=\frac{1}{2(m_1+m_2)}\{(m_1v_1+m_2v_2)^2+e^2m_1m_2(v_1-v_2)^2-(m_1+m_2)(m_1v_1^2+m_2v_2^2)\}$

→（式が再び複雑になってきた。 なかなか、どうして！　この程度の計算では大丈夫！）

反発係数を含まない項のみを取り出して計算する。

$(m_1v_1+m_2v_2)^2-(m_1+m_2)(m_1v_1^2+m_2v_2^2)$

$=m_1^2v_1^2+2m_1m_2v_1v_2+m_2^2v_2^2-m_1^2v_1^2-m_1m_2v_2^2-m_1m_2v_2^2-m_2^2v_2^2$

$=-m_1m_2(v_1^2-2v_1v_2+v_2^2)$

$=-m_1m_2(v_1-v_2)^2$

→（ほらほら、簡単になってきた！　よしよし）

したがって、元の運動エネルギーの変化量　ΔU の式に戻すと

$\Delta U=\frac{1}{2(m_1+m_2)}\{e^2m_1m_2(v_1-v_2)^2-m_1m_2(v_1-v_2)^2\}$

$=\frac{(e^2-1)m_1m_2(v_1-v_2)^2}{2(m_1+m_2)}$

反発係数は　$0\le e\le 1$　であり、　(e^2-1) は負またはゼロになる以外は正であるので

$\Delta U=\frac{(e^2-1)m_1m_2(v_1-v_2)^2}{2(m_1+m_2)}\le 0$　であることがわかる。

これは、「一般的な衝突である非弾性衝突(e<1)のとき、衝突前後で力学的エネルギーの和(運動エネルギーの和)は減少する」ことを示している。　ただし、$e=1$(弾性衝突)のときのみ、力学的エネルギー保存の法則が成立する。

［まとめ］

1. **非弾性衝突(e<1)の衝突の前後で、力学的エネルギーは失われる。**
2. **衝突前後で力学的エネルギーを保存するのは弾性衝突(e=1)のときのみ。**
3. **完全非弾性衝突(e=0)のときがエネルギー減少が最も大きい。**

弾性衝突以外では、力学的エネルギー保存則が不成立！