万有引力の法則

（　　）組（　　）番　氏名（　　　　　　　　　　）

ニュートンの万有引力の法則　とは

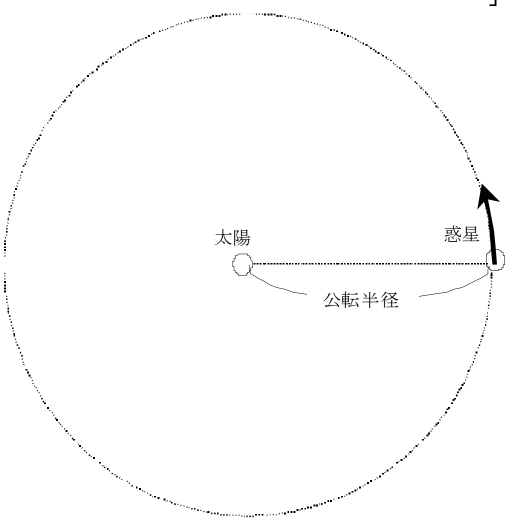
ニュートンが万有引力を発見するに至った道筋とは

ニュートンはリンゴが木から落ちることで万有引力を発見したわけではない。そこにヒントを見つけただけだ。

ニュートンが「万有引力の法則」$F = G\dfrac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$ を見つけた過程を考えてみよう。

1. ケプラーによる惑星運行の法則
   ① 第一法則 → [　　　　　　　　　　]
   ② 第二法則 → [　　　　　　　　　　]
   ③ 第三法則 → [惑星の公転軌道の周期の2乗は、長軸半径の3乗に比例する。]
2. ニュートンの運動の法則
   ① 第一法則 → [　　　　　　　　　　]
   ② 第二法則 → [　　　　　　　　　　]
   ③ 第三法則 → [　　　　　　　　　　]

中堅　ケプラーの法則を使って、ニュートンの万有引力を数式で導く下の文章を読んで各問に答えなさい。



太陽系の惑星は一部の例外を除いてほとんど円運動と見なせる。 したがって、惑星の運動を等速円運動と見なしても良いことが分かる。（楕円運動では数式計算が複雑になるため等速円運動として解く）

質量 M [kg] の太陽からの距離 r [m]を速度 v [m/s] で円軌道を公転する質量 m [kg] の惑星があるとする。この惑星の加速度 aを求めると、等速円運動の加速度より $a=$ [　　　　]、その周期は　$T=$ [　　　　]…①である。 したがって、太陽と惑星の間の万有引力の大きさは　$F=$ [　　　　]…②　と書けることが分かる。①より惑星の速度 vを消去して、万有引力の大きさは　$F=$ [　　　　]…③　になる。

ケプラーの第三法則より、$T^2/a^3 = k$（ただし、kは一定の値）が成立するので、惑星の公転周期 Tを消去すると、万有引力の大きさは　$F=$ [　　　　]…④ の形になる。 惑星の質量に比例するのだから、太陽と惑星の立場を入れ替えて考えると太陽の質量にも比例しなければならない。

これより、「万有引力の大きさは距離の2乗に反比例し、質量の積に比例する」という結論になる。

以上より、万有引力の公式　$F = G\dfrac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$　が導かれたことになる。

(1) 上の文章の空欄を適当な数式で埋めなさい。

(2) 地球の公転半径 1 億 5000 万 km、公転周期 365.25 日として、ケプラーの第三法則の比例定数 kを求めなさい。

(3) 万有引力定数をケプラーの第三法則の比例定数 k、太陽の質量 Mを使って表しなさい。

(4) 万有引力定数を 6.67×10^{-11} [N·m^2/kg^2] として太陽の質量を求めなさい。

万有引力の法則（解説）　　　　　　　　　　（　　）組（　　）番　氏名（　　　　　　　　　　）

ニュートンの万有引力の法則

ニュートンにより発見された有名な法則で、りんごが木から落ちるのを見て思いついたといわれている。この法則は「質量があるすべての物体は互いに引き合う性質がある。これを万有引力という。万有引力の大きさは、両物体の質量の積に比例し、互いの距離の二乗に反比例する。」である。これを数式で示すと、それぞれの物体の質量を m_1、m_2 [kg]、互いの距離を r [m] であるときの万有引力の大きさを F [N] とすると、

万有引力の公式　$F = G\dfrac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$　ただし、G は万有引力定数 6.67×10^{-11} [$\mathrm{Nm^2/kg^2}$]

このような方程式が、りんごが落ちるのを見るだけで分かるはずがないのだ！ニュートンが偉大であってもﾈ

ニュートンが万有引力を発見に至る道筋とは？

3. **ケプラーによる惑星運行の法則**（ティコ・ブラーエによる観測データを基にケプラーがまとめた法則）
   - ① **第一法則** → 惑星は太陽をひとつの焦点とする楕円上を運動する。
   - ② **第二法則** → 惑星と太陽を結ぶ線分が一定時間に通過する面積は一定である。
   - ③ **第三法則** → 惑星の公転周期 T の２乗は、軌道楕円の半長軸（=惑星の太陽からの平均距離になることはわかるかな？ 証明可能だよ！）a の３乗に比例する。

     これを式で示すと　$\dfrac{T^2}{a^3} =$ 一定　である。

4. **ニュートンの運動の法則**
   - ① 第一法則 → **慣性の法則**（物体に外力が働かないときその物体は等速直線運動をする）
   - ② 第二法則 → **運動の法則**（物体の加速度は加えた力に比例し、質量に反比例する）
   - ③ 第三法則 → **作用・反作用の法則**（物体に力を加えたとき、その物体から同じ大きさの力で押し返される）

ステップ１　等速円運動の解析　（向心力と向心加速度）

太陽系の惑星は一部の例外を除いてほとんど円運動と事実上は見なせる。したがって、惑星の運動を等速円運動と見なしても良い。（楕円運動では数式計算が複雑になるため等速円運動として解く）

質量 M [kg] の太陽からの距離 r [m] を速度 v [m/s] で円軌道を公転する質量 m [kg] の惑星とする。

この惑星の加速度を求めよう。等速円運動の加速度は　$a = \dfrac{v^2}{r}$　であり、その周期は　$T = \dfrac{2\pi r}{v}$ …①。

したがって、このとき、太陽と惑星の間の万有引力（向心力に相当）の大きさは　$F = ma = \dfrac{mv^2}{r}$ …②　と書ける。①を使って惑星の速度 v を消去すると、万有引力の大きさは $F = \dfrac{m}{r}\left(\dfrac{2\pi r}{T}\right)^2 = \dfrac{4\pi^2 mr}{T^2}$ …③　だ。

ステップ２　ケプラーの法則の適用　（公転周期の２乗は公転半径の３乗に比例する）

ケプラーの第三法則より、$\dfrac{T^2}{r^3} = k$　（ただし、k は一定の値）が成立するので、惑星の公転周期 T を消去すると、万有引力の大きさは　$F = \left(\dfrac{4\pi^2 m}{k}\right)\cdot\dfrac{1}{r^2}$ …④ と書け、引力が惑星の質量に比例している。太陽と惑星を入れ替えて考えると太陽の質量にも比例するはずだ。よって、「万有引力の大きさは、距離の2乗に反比例し、質量の積に比例する」ことになる。よって、式で示すと、万有引力の公式　$F = G\dfrac{m \cdot M}{r^2}$ ･･･⑤ になる。

④、⑤より、r、f を消去して、　$GMk = 4\pi^2$　の関係式が導かれる。(3)、(4)はこの関係式を使えば解ける。