# 万有引力による位置エネルギー

（　　）組（　　）番　氏名（　　　　　　　　　　　）

**ニュートンの万有引力の法則**

質量 $m_1$、$m_2$ [kg] の二つの物体の間の距離が $r$ [m]であるとき、

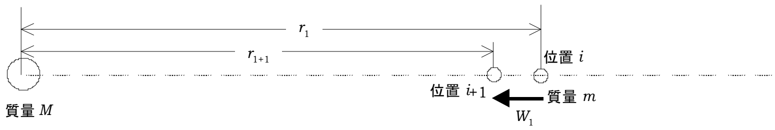
万有引力の大きさは　[　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　]

重力による位置エネルギー　→　公式 $U = mgh$ と表せる（地上を基準として高さ $h$ の位置エネルギー）。

※ 地上付近では、高さの変化が小さい（地球の半径に比べて小さい）ので万有引力は一定と考えて良い。
しかし、地球の半径に比べて高さが大きく変化するとこのようにはゆかない。（初級の問題にて証明する）
では、どのように表すのか？

［定義］基準点から移動するときの力がした仕事の量を「位置エネルギー」という！　→　仕事＝力×距離×cosθ

**万有引力による位置エネルギー**




基準点を無限遠方とする。また、右の図に示すように各値を取る。

距離　$r_1$　の位置 $i$ から距離　$r_{i+1}$ の位置 $i+1$ に移動するときの仕事を考える。このときの仕事　$W_i$ は　[　　　　　　　　　　　]である。

無限遠方から距離 $r$ まで運ぶときにする仕事の総量は $\sum_{i=1}^{N} W_i =$ [　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　]

また、$r_1 = \infty$ 、$r_N = r$ であることから右辺を展開・整理すると

$\sum_{i=1}^{N} W_i =$ [　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　]になる。

万有引力による位置エネルギーは　$U = -G\dfrac{Mm}{r}$　（ただし、無限遠方を位置エネルギーの基準とする）と書ける。

**積分により無限遠方から運ぶ仕事を求める方法**　（数学が得意な人向きの方法）

**初級**　物理ＩＢで習った重力による位置エネルギーの公式　$U=mgh$　の式は地球表面でのみ使用可能であるがこのような公式が地球表面で使えることを万有引力による位置エネルギーの公式から満ち引きなさい。

**中堅**　地球の重力圏から脱出するためには地球表面からどれくらいの速度で飛び出せば良いか。

# 万有引力による位置エネルギー（解説）　（　）組（　）番　氏名（　　　　　　　）

## ニュートンの万有引力の法則

質量 $m_1$、$m_2$ [kg] の二つの物体の間の距離が $r$ [m]であるとき、互いに働く万有引力は $f=G\dfrac{m_1\cdot m_2}{r^2}$ と書ける。このときの比例定数の値を万有引力定数と呼び $6.67\times10^{-11}[\mathrm{Nm^2/kg^2}]$である。

重力による位置エネルギー　→　公式 $U=mgh$ と表せる（地上を基準として高さ $h$ の位置エネルギー）。

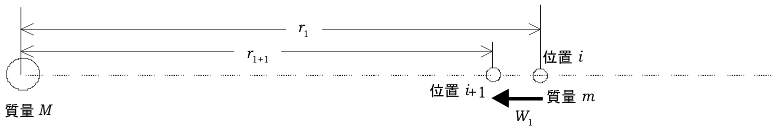
地上付近では万有引力の大きさは高さが地球の半径に比べて小さいときは一定と考えて良い。

地球の半径に比べて高さが大きくなるとこのようには書けなくなる。

では、どのように表すのか？

※ 基準点から移動するときの力がした仕事の量を位置エネルギーという！　→　仕事＝力×距離×cosθ

## 万有引力による位置エネルギー




基準点を無限遠方とする。また、右の図に示すように各値を取る。

距離 $r_i$ である位置 $i$ から距離 $r_{i+1}$ である位置 $i+1$ に移動するときの仕事を考える。このときの仕事 $W_i$は、$W_i=G\dfrac{m\cdot M}{r_i^2}\times\left(r_{i+1}-r_i\right)$ である。

無限遠方から距離 $r$まで運ぶときの仕事は $\displaystyle\sum_{i=1}^{N}W_i=\sum_{i=1}^{N}G\frac{m\cdot M}{r_i^2}\times\left(r_{i+1}-r_i\right)\simeq\sum_{i=1}^{N}G\frac{m\cdot M}{r_i\cdot r_{i+1}}\times\left(r_{i+1}-r_i\right)$

であり、$r_1=\infty$ 、$r_N=r$ であることから右辺を展開・整理すると

$\displaystyle\sum_{i=1}^{N}G\frac{m\cdot M}{r_i\cdot r_{i+1}}\times\left(r_{i+1}-r_i\right)=GmM\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{r_i}-\frac{1}{r_{i+1}}\right)=GmM\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_N}\right)=-\frac{GmM}{r}$ になるので、万有引力による位置エネルギーの公式は $U=-G\dfrac{Mm}{r}$ （ただし、無限遠方を位置エネルギーの基準とする）と書ける。

※ 積分により無限遠方から運ぶ仕事を求めても良い。

**初級** 地上での重力による位置エネルギーをゼロとすると、高さ $h$ [m]では $U=\left(-G\dfrac{Mm}{R+h}\right)-\left(-G\dfrac{Mm}{R}\right)$ より、$U=G\dfrac{Mmh}{R\left(R+h\right)}$ だ。また、地表での重力は $mg=G\dfrac{Mm}{R^2}$ と表すことができる。よって、重力による位置エネルギーは $U=\dfrac{mgR^2h}{R\left(R+h\right)}=mgh\times\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{h}{R}\right)}\simeq mgh$（$h<R$より、$\dfrac{h}{R}\simeq0$ といえる）となる。

よって、重力による位置エネルギーの公式 $U=mgh$ の式が成立する。

**中堅** 力学的エネルギー保存の法則より、位置エネルギーと運動エネルギーの和は一定である。

地上での速度を $v_0$ として、$\dfrac{1}{2}mv_0{}^2+\left(-G\dfrac{Mm}{R}\right)=\dfrac{1}{2}mv^2+\left(-G\dfrac{Mm}{\infty}\right)=\dfrac{1}{2}mv^2>0$ より、

$\dfrac{1}{2}mv_0{}^2+\left(-G\dfrac{Mm}{R}\right)>0$ …① である。また、地表での重力から、$G\dfrac{Mm}{R^2}=mg$ …② より、地球から脱出できるための速度は $v_0>\sqrt{2gR}$ を満たす必要がある。これを「第二宇宙速度」といい、$11.2[\mathrm{km/s}]$ になる。

**参考** 「第一宇宙速度（人工衛星になる速度）」と呼ばれる $7.91[\mathrm{km/s}]$ は人工衛星になる速度である。