単振動

(1) 静止したエレベータの中で、ひもの長さが l、おもりの質量が mの単ふりこが振幅A_0で振動している。今、エレベータを急に上向きの加速度 a で上昇させたとき、A_0' の振幅となった。この振幅の変化は、エレベータを上昇し始めたときのふりこの振れ角に関係していることが分かった。加速中の単ふりこの振幅は加速前のものと比べてみなさい。

(2) 地球お中進から距離 R の円軌道を回っている質量 m の人工衛星がある。この軌道半径を h(軌道半径より十分に小さいとする)だけ増そうとして、人工衛星に距離 Rと $R+h$における位置エネルギーの差に相当する仕事を与えたところ、当初考えていた軌道とは異なる円軌道になった。この円軌道の軌道半径を求めなさい。ただし、万有引力係数を G、地球の質量を Mとする。

(3) 一様な磁界のかなを電荷 q ＞0、質量 mの荷電粒子が磁界の方向に垂直に速さvで放出された。磁束密度を B_1、粒子のエネルギーE_1 を持ち、半径 r_1 、周期 T_1 の円運動を行った。 E_1 、 T_1 、 r_1 を求めなさい。次に磁束密度をゆっくりと増加させ、B_2にしたところ、最終的に粒子のエネルギーが E_3 、半径が r_3 、周期が T_3の円運動に変わった。また、最初から磁束密度がB_2の状態で、最初と同様の実験をしたところ、粒子のエネルギーがE_2 、半径が r_2 、周期が T_2の円運動であった。それぞれの場合の、エネルギー、半径、周期の大小関係を示しなさい。

解説

(1)（別解）最初、振幅がA_0の単ふりこであるので、ある時刻の変位をAとすると$A=A_0\sin\omega t$である。また、

$\omega=\sqrt{\dfrac{g}{l}}$ である。また、そのときの速度は $V=V_0\cos\omega t=A\omega\cos\omega t$ である。

エレベータの加速度が上向きにaとなった後、その瞬間に、変位や速度の変化はないが、力の変化があるので、加速度、角振動数が変わる。この単ふりこの場合、角振動数が$\omega=\sqrt{\dfrac{g+a}{l}}$になる。

新しい単振動は、$A=A_0'\sin(\omega' t+\delta)$、$V=V_0'\cos(\omega' t+\delta)=A_0'\omega'\cos(\omega' t+\delta)$、$\omega=\sqrt{\dfrac{g+a}{l}}$

である。これらより、$\left(A_0'\right)^2=A^2+\left(\dfrac{V}{\omega'}\right)^2$が成立するので、元の単振動の関係式を使って代入・整理する。

$$\left(A_0'\right)^2=\left(A_0\sin\omega t\right)^2+\left(\frac{A_0\omega\cos\omega t}{\omega'}\right)^2=A_0^2\left(\sin^2\omega t+\frac{g}{g+a}\cos^2\omega t\right)=\frac{A_0^2}{g+a}\left(g+a\sin^2\omega t\right)$$ である。

よって、$\sqrt{\dfrac{g}{g+a}}A_0<A_0'<A_0$である。

(2) 重力による位置エネルギーの公式は、無限遠方をゼロとして、$U=-G\dfrac{Mm}{R}$である。円運動のためには重力と遠心力が釣り合うので、$G\dfrac{Mm}{R^2}=\dfrac{mv^2}{R}$が成立している。したがって、その時の軌道を回る衛星は、力学的エネルギーを$-G\dfrac{Mm}{R}+\dfrac{1}{2}mv^2=-G\dfrac{Mm}{2R}$であることがわかる。軌道を変えるために、与えたエネルギーは、位置エネルギーの差の分だから、$\Delta U=\left(-G\dfrac{Mm}{R+h}\right)-\left(-G\dfrac{Mm}{R}\right)=\dfrac{GMmh}{R(R+h)}$であるので、実際

の軌道は $\left(-G\dfrac{Mm}{2(R+x)}\right)-\left(-G\dfrac{Mm}{2R}\right)=\dfrac{GMmx}{2R(R+x)}$ のエネルギー差のところだから、$\dfrac{GMmh}{R(R+h)}=\dfrac{GMmx}{2R(R+x)}$ の関係が成立する。これより、$2(R+x)h=(R+h)x$ だから、$x=\dfrac{2Rh}{R-h}\cong 2h$ 上の軌道に移ることになる。

(3) 磁界の中の荷電粒子の運動はローレンツ力による円運動になる。 $qvB=\dfrac{mv^2}{r}$ の関係より、半径 $r=\dfrac{mv}{qB}$ 、周期は $T=\dfrac{2\pi m}{qB}$ 、エネルギーは $E=\dfrac{1}{2}mv^2$ である。

最初(磁束密度が B_1 のとき)と最後(磁束密度が B_2 のとき)のケースについては上の公式に代入するだけ。

$$E_1=\frac{1}{2}mv^2、\ r_1=\frac{mv}{qB_1}、\ T_1=\frac{2\pi m}{qB_1}、\quad E_2=\frac{1}{2}mv^2、\ r_2=\frac{mv}{qB_2}、\ T_2=\frac{2\pi m}{qB_2}$$

上の式より、 $E_1=E_2$ 、 $r_1>r_2$ 、 $T_1>T_2$ である。

では、「磁界を徐々に磁束密度を B_1 から B_2 に増加させた場合」について考えてみよう。わずかの時間 Δt の間に、磁束密度が ΔB 増加したとする。最初、半径 r の円周のコースを考える。コース内の磁束の変化は $\Delta\Phi=\Delta B\times\pi r^2$ であるので、円周向きの誘導起電力 $V=-\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ が発生するので、逆起電力は $V=-\dfrac{\pi r^2\Delta B}{\Delta t}$ になる。したがって、円周に沿った電界は $E=-\dfrac{r}{2}\dfrac{\Delta B}{\Delta t}$ である。したがって、荷電粒子は電界からの力 $f=qE=-\dfrac{qr}{2}\dfrac{\Delta B}{\Delta t}$ が働く。 運動方程式 $ma=-\dfrac{qr}{2}\dfrac{\Delta B}{\Delta t}$ であるので、この円周方向の加速度の大きさは $a=\dfrac{qr}{2m}\dfrac{\Delta B}{\Delta t}$ になる。したがって、円周方向の速度の増加は $\Delta v=a\Delta t=\dfrac{qr}{2m}\Delta B$ である。また、$r=\dfrac{mv}{qB}$ であるので、これを代入･整理すると、$\dfrac{\Delta v}{v}=\dfrac{\Delta B}{2B}$ だから、両辺積分すると $\log|v|=\dfrac{1}{2}\log|B|+C$ になる。したがって、磁束密度と荷電粒子の速度の関係は $v=\pm e^C\sqrt{B}=K\sqrt{B}$ （K は積分定数）になることがわかる。