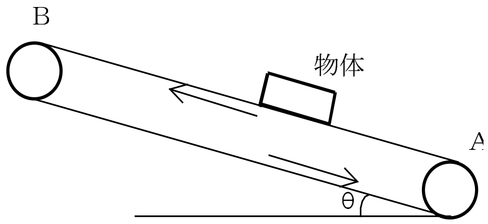
61．動くベルト上の単振動（東京大学 94）（改作）

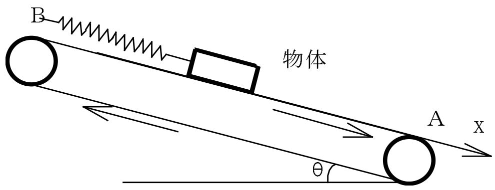
右の図のようにローラーA、B により十分に速い速度V_0で動くベルトがある。このベルトの上に質量 m の物体を乗せた。重力加速度を g として以下の各問いに答えなさい。



最初、ベルトを物体の下を A から B の向きに動かしたところ、物体はベルトの上を滑りながら AB 間の一定位置に静止した。

(1) 物体とベルトの間の動摩擦係数はいくらになるか。

右図のように、ばね定数 k のばねを物体に取り付け、ベルトの動く向きを反対にした。ばねの伸びがある大きさになった位置で物体はつりあいって AB 間の一定位置に静止した。



(2) 物体がつりあいを保ったときのばねの伸びを求めなさい。

次に、物体をつりあって静止した位置から、さらにばねが伸びたところに置き、静かに手を離した。この場合、物体は静止せず単振動を続けた。

(3) つりあいの位置からxずれた位置において、物体に働く力を求め、物体の運動方程式を作りなさい。

(4) この単振動の周期を求めなさい。

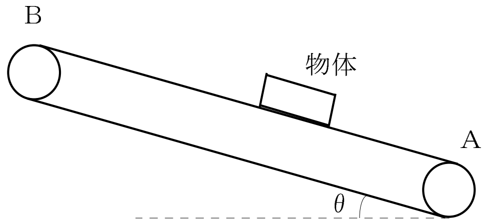
次に、物体をベルトと同じ速さで乗せた。乗せた直後では、物体がベルトの上で滑らず、ベルトとともに移動する。そのときの物体に働いている摩擦力は静止摩擦力である。ベルトの移動とともにばねが伸び、物体をひく力が強くなる。やがて、ばねがつりあいの位置から更に長さl伸びたとき、静止摩擦力の限界に達して物体が滑り出す。その後の物体の運動は単振動になる。

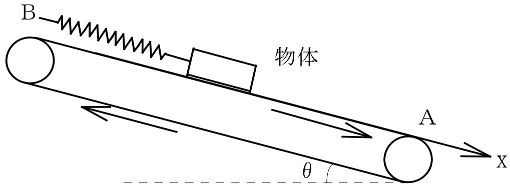
(5) 滑り出す直前のばねの伸びを求めなさい。

(6) この単振動の振幅を求めなさい。（これが難しい！）

(7) 物体の最大速度を求めなさい。（これが難しい！）

61. 動くベルト上の単振動（東京大学 94）





(1) 最初はベルトの上で滑りながら静止するので、物体のベルトとの動摩擦力と重力の分力がつりあう。ベルトを滑り落ちる方向を正として $mg\sin\theta - \mu_k mg\cos\theta = 0$ より、物体とベルトの間の動摩擦係数は $\mu_k = \tan\theta$ である。

(2) ベルトは下向きに動くので、下向きの動摩擦力、斜面を下る方向の重力の分力、上向きのばねの力の３力がつりあう。$\mu_k mg\cos\theta + mg\sin\theta - kl_A = 0$ が成立する。これを解き、(1)を代入すると、$l_A = \dfrac{mg(\mu_k\cos\theta + \sin\theta)}{k} = \dfrac{2mg\sin\theta}{k}$ だけ ばねが伸びたところでつりあうことになる（この位置がこの単振動の中心）。

(3) さらに離れたところに置くと静止せず単振動をする。 つりあいの位置(単振動の中心点)から x ずれたところでの運動方程式を作ると、$ma = mg\sin\theta + \mu_k mg\cos\theta - k(l_A + x)$ である。（整理すると、$ma = -kx$ ）

(4) 加速度と単振動の公式と比較してみると、 $a = -\dfrac{k}{m}x = -\omega^2 x$ である。よって、単振動の周期は $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ である。 また、単振動の速度は、単振動の公式 $v = A\omega\cos(\omega t + \delta)$ 、$x = A\sin(\omega t + \delta)$ に当てはめると、単振動の中心では、 $v = \pm A\omega$ より、$V_1 = A_1\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ である。（単振動の中心では $x = 0$ より $\sin(\omega t + \delta) = 0$ 、$\cos(\omega t + \delta) = \pm 1$ が成立するため）

(5) ベルトと同じ速さで乗せると、乗せたときはベルトの上で滑らないのでそのときの摩擦力は静止摩擦力になる。 ばねが伸びるにつれ、静止摩擦力を大きくする必要がある。滑らない限界としてその大きさは最大摩擦力まで可能である。 そのときのばねの伸びを x 、摩擦力を f とすると、つりあいの関係より、$kx - f - mg\sin\theta = 0$ が成立するので、静止摩擦力 $f = kx - mg\sin\theta$ となる。静止摩擦力が最大摩擦力より小さいうちは滑らないので、 $kx - mg\sin\theta \le \mu_S mg\cos\theta$ より、$x < \dfrac{mg(\mu_S\cos\theta + \sin\theta)}{k} = l_B$ まではベルトの上で滑らない。つりあいの位置からのずれは、$l = l_B - l_A = \dfrac{mg(\mu_S\cos\theta - \sin\theta)}{k}$ (問題集の解答は(1)を代入している) この運動はO点を中心とする単振動である。

(6)「滑り始めたとき速度ゼロではない！」から、滑り始めた位置は振幅を示す位置にはならず、単振動の中途の位置に過ぎない。では、この単振動の振幅をもとめるにはどのようにすればよいか、考えてみよう。 一般に単振動の変位、速度は $x = A\sin(\omega t + \delta)$ 、$\upsilon = A\omega\cos(\varpi t + \delta)$ と表される（初期位相 δ ）。この単振動の場合、$x = l$ のところで速度が $\upsilon = V_0$ だから、これより三角関数部分を消去すると、$l^2 + \left(\dfrac{V_0}{\omega}\right)^2 = A^2$ が成立する。 振幅は $A_2 = \sqrt{l^2 + \dfrac{mV_0^2}{k}}$ である。

(7) 単振動の公式 $\upsilon = A\omega\cos(\varpi t + \delta)$ より、単振動の中心を通過するときに最大速度 $\upsilon = A\omega$ になることがわかる。よって、この場合の物体の速度最大は、O 点を通過するときに速度 $V_2 = A_2\omega = \sqrt{\dfrac{kl^2}{m} + V_0^2}$ である。